

# Vier-Felder-Tafeln per GTR

## Darstellung und Berechnung prozentualer Anteile mit Hilfe des CASIO fx-CG20

Wir betrachten hierzu ein medizinisches Testverfahren, das bzgl. einer sehr selten auftreten den Infektionskrankheit mit einer Sicherheit von 99 Prozent korrekte Testergebnisse für bereits Infizierte liefert. Aufgrund von ausgereiften Labortechniken liegt die Fehlerquote bei Gesunden (nicht Infizierten) bei circa 2 Prozent. Andererseits kann man momentan davon ausgehen, dass unter 10 Millionen Menschen ca. 2500 Infizierte vorkommen.

Neben dem Gesundheitszustand mit den Ausprägungen **krank** (**infiziert**) und **gesund** (**nicht infiziert**) betrachten wir das Merkmal Testergebnis mit den Ausprägungen **positiv** und **negativ**.

Wir haben somit die in Abbildung 1 beschriebenen Eingangsdaten vorliegen.

		positiver Test	negativer Test
0,0002500	infiziert	0,9900000	
	gesund	0,0200000	

Abbildung 1: Testen auf eine Infektion, Eingangsdaten

Hieraus gewinnen wir:

		positiver Test	negativer Test	Summe
0,00.025	infiziert	0,99	0,01	1
		0,00.024.75	0,00.000.25	
0,99.975	gesund	0,01.999.5	0,97.975.5	
		0,02	0,98	1
1	Summe	0,02.024.25	0,97.975.75	1

Abbildung 2: komplettierte Vier-Felder-Tafel zum Test

Und weiter:

$$\frac{0,00.024.75}{0,02.024.25} = 0,01.222.675.065 = 1,223\%$$

als Wahrscheinlichkeit, unter den als **positiv Getesteten** (100%) einen tatsächlich **Infizierten** anzutreffen

bzw.

$$\frac{0,01.999.5}{0,02.024.25} = 0,98.777.324.94 = 98,78\%$$

als Wahrscheinlichkeit, unter den als **positiv Getesteten** (100%) einen **Gesunden** anzutreffen.

Auf dem CASIO fx-CG20 öffnet man zunächst die eActivity-Datei 140514BY.g3e. In den drei in Magenta hinterlegten Zellen werden die gegebenen Informationen verbucht. Als Resultat<sup>1</sup> ergibt sich das Ergebnis aus Abbildung 3.

Rad Norm1 d/c Real 140406BY				
140	A	B	C	D
2	2.5E-4	0.99	0.01	1
3	krank	2.4E-4	2.5E-6	
4	gesund	0.0199	0.9797	
5	0.9997	0.02	0.98	1
6	1	0.0202	0.9797	1
=A2×B2				
FILE EDIT DELETE INSERT CLEAR ▶				

Abbildung 3: CG20: Vier-Felder-Tafel zum ersten Test

Die Auswertung des ersten Tests liefert:

P(infiziert positiver Test)=	0,0122268
P(gesund positiver Test)=	0,9877732
Testfeld	10000000
davon positiv & infiziert	2475
davon positiv & gesund	199950
Summe	202425

Abbildung 4: Ergebnisse des ersten Tests

Analog liefert der CG20 folgende Resultate<sup>2</sup>, falls man in der vorliegenden Tabelle zum ersten

- 1 Diese speziellen Ausführungen in Hinblick auf den CASIO fx-CG20 lehnen sich unmittelbar an die allgemeinen Überlegungen zum Thema *Bedingte Wahrscheinlichkeiten* in dem Artikel *Von Veedels- und Winkelzügen an*. Vgl. hierzu [www.mathetreff.nrw.de](http://www.mathetreff.nrw.de).
- 2 Sämtliche CG20-Screenshots zeigen jeweils unten rechts exemplarisch die Formeln der momentan markierten Zelle an.

Test nach rechts weiterblättert.

Rad Norm1 d/c Real 140406BY				
140	D	E	F	G
1			Alle	1E7
2	1			
3		P(k T+)	0.0122	2475
4		P(G T+)	0.9877	199950
5	1	Summe	1	202425
=B3÷B6				
FILE EDIT DELETE INSERT CLEAR				

Abbildung 5: CG20: Ergebnisse des ersten Tests

Nichtsdestotrotz liegt die Fehlerquote für **Gesunde**, die irrtümlich als **Infizierte** klassifiziert wurden, nach dem ersten Test nun bei **98,78%**, was selbstverständlich in dieser Größenordnung weiterhin als wenig akzeptabel erscheint.

Bei einem Testfeld von 10 Millionen Personen (100%) ergäben sich demnach **202.425** als positiv getestete Personen, wovon allerdings nur **2475** tatsächlich infiziert sind, während der Rest von **199.950** Personen in Wirklichkeit gesund ist. Als Ausweg aus diesem Dilemma bleibt nur die Möglichkeit offen, alle als infiziert klassifizierten Personen, das sind immerhin **202.425**, erneut zu testen.

2. Test: Eingangsdaten		positiver Test	negativer Test
0,0122268	infiziert	0,9900000	
	gesund	0,0200000	

Abbildung 6: Eingangsdaten für den zweiten Test

Der zweite Test basiert somit auf den Eingangsdaten in Abbildung 6. Die restlichen Daten lassen sich – wie oben dargestellt – entsprechend ergänzen und führen damit zur komplettierten Vier-Felder-Tafel bzgl. des zweiten Tests.

2. Test		positiver Test	negativer Test
0,0122268	infiziert	0,9900000	0,0100000
		0,0121045	0,0001223
0,9877732	gesund	0,0197555	0,9800000
		0,0200000	0,9800000
		0,0318599	0,9801223

Abbildung 7: komplettierte Vier-Felder-Tafel zum 2. Test

Wir erhalten hieraus:

$$\frac{0,01.210.45}{0,03.185.99} = 0,37.992.79 = \mathbf{37,99\%}$$

als Wahrscheinlichkeit, unter den nun als **positiv Getesteten** (100%) einen tatsächlich **Infizierten** anzutreffen

bzw.

$$\frac{0,01.210.45}{0,03.185.99} = 0,62.007.21 = \mathbf{62,01\%}$$

als Wahrscheinlichkeit, unter den als **positiv Getesteten** (100%) einen **Gesunden** anzutreffen.

Abbildung 8 und Abbildung 10 zeigen die Ergebnisse dieses zweiten Tests im tabellarischen Überblick.

P(infiziert positiver Test)=	0,3799279
P(gesund positiver Test)=	0,6200721
Testfeld	202425
davon positiv & infiziert	2450
davon positiv & gesund	3999
Summe	6449

Abbildung 8: Ergebnisse des zweiten Tests

Rad Norm1 d/c Real 140406BY				
140	A	B	C	D
9	0.0122	0.99	0.01	1
10	krank	0.0121	1.2E-4	
11	gesund	0.0197	0.968	
12	0.9877	0.02	0.98	1
13	1	0.0318	0.9681	1
=B10+B11				
FILE EDIT DELETE INSERT CLEAR				

Abbildung 9: CG20: Vier-Felder-Tafel zum zweiten Test

Bei dem reduzierten Testfeld von 202.425 Personen (100%) ergäben sich demnach **6449** als positiv getestete Personen, wovon jetzt **2450** tatsächlich infiziert sind, während der Rest von **3999** Personen gesund ist. Um unsere Sicherhei-

ten weiter zu verbessern, sollten wir in einen dritten Test investieren, indem wir die verbleibenden als infiziert klassifizierten Personen, das sind inzwischen nur noch 6449, erneut testen.

Rad Norm1 d/c Real 140406BY				
140	D	E	F	G
8			Alle	202425
9	1			
10		P(k T+)	0.3799	2450.2
11		P(G T+)	0.62	3999
12	1	Summe	1	6449.2
=B10×G8				
FILE EDIT DELETE INSERT CLEAR ▶				

Abbildung 10: CG20: Ergebnisse des zweiten Tests

Für den dritten Test haben wir folgende Eingangsdaten:

3. Test: Eingangsdaten		positiver Test	negativer Test
0,3799279	infiziert	0,9900000	
	gesund	0,0200000	

Abbildung 11: Eingangsdaten für den dritten Test

Hieraus gewinnen wir die komplettierte Vier-Felder-Tafel:

3. Test		positiver Test	negativer Test
0,3799279	infiziert	0,9900000	0,0100000
		0,3761286	0,0037993
0,6200721	gesund	0,0124014	0,9800000
		0,0200000	0,9800000
		0,3885301	0,9837993

Abbildung 12: komplettierte Vier-Felder-Tafel zum 3. Test

P(infiziert positiver Test) =	0,9680811
P(gesund positiver Test) =	0,0319189
Testfeld	6449
davon positiv & infiziert	2426
davon positiv & gesund	80
Summe	2506

Abbildung 13: Ergebnisse des dritten Tests

Bei dem im dritten Durchgang auf 6449 Personen (100%) reduzierten Testfeld ergäben sich

2506 als positiv getestete Personen, wovon jetzt 2426 tatsächlich infiziert sind, während der Rest von 80 Personen gesund ist. Mit der Sicherheit von knapp 3% für positive, falsche Ergebnisse geben wir uns zufrieden. Nach dem dritten Test ist es also gelungen, 2506 Personen als infiziert einzustufen. Darunter befinden sich nur noch 80 falsche, positive Befunde.

Rad Norm1 d/c Real 140406BY				
140	A	B	C	D
16	0.3799	0.99	0.01	1
17	krank	0.3761	3.7E-3	
18	gesund	0.0124	0.6076	
19	0.62	0.02	0.98	1
20	1	0.3885	0.6114	1
=A19×B19				
FILE EDIT DELETE INSERT CLEAR ▶				

Abbildung 14: CG20: Vier-Felder-Tafel zum dritten Test

Rad Norm1 d/c Real 140406BY				
140	D	E	F	G
15			Alle	6449.2
16	1			
17		P(k T+)	0.968	2425.7
18		P(G T+)	0.0319	79.98
19	1	Summe	1	2505.7
=B18÷B20				
FILE EDIT DELETE INSERT CLEAR ▶				

Abbildung 15: CG20: Ergebnisse des dritten Tests

Bei allen drei Testergebnissen liegt die Anzahl der korrekt positiv Getesteten durchgängig bei ca. 2500 Personen und zwar unabhängig vom Umfang des Testfeldes, was ja im ersten Durchgang immerhin ein Volumen von 10 Millionen Personen aufwies. Dagegen ließ sich die Anzahl der fälschlicherweise positiv Getesteten nach jedem Test erheblich eingrenzen. Hier reduzierte sich das Volumen fast dramatisch von 199.950 über 3999 auf letztendlich 80 Personen.

rm